MATHE-TREFF

Bezirksregierung
Düsseldorf

Die Entdeckung der irrationalen Zahlen

(von H. Tiex)

Nachdem im letzten Artikel gezeigt wurde, dass die Erzählung über die Entdeckung der irrationalen Zahlen durch Hippasos anhand eines Fünfecks mit hoher Wahrscheinlichkeit falsch ist, soll nun untersucht werden, wie diese Entdeckung in Wirklichkeit ablief.

Die alten Babylonier und Ägypter

Anders als der Satz des Pythagoras kann das Wissen über die Existenz irrationaler Zahlen von den Griechen nicht aus dem alten Orient übernommen worden sein, da es keinen Hinweis darauf gibt, dass man diese Zahlen dort als irgendwie ungewöhnlich wahrgenommen hat. Sowohl in Ägypten als auch in Babylonien finden sich Texte, in denen mit Approximationen für irrationale Zahlen (wie zum Beispiel die Zahl π) gerechnet wird, aber es gibt keinen Hinweis darauf, dass man sich der besonderen Eigenschaften dieser Zahlen bewusst gewesen wäre. Ein besonders interessantes Beispiel dafür ist die babylonische Tontafel YBC 7289, bei der es sich vermutlich um eine Übungsaufgabe aus einer Schreiberschule handelt, die zwischen 1600 v. Chr. und 1800 v. Chr. entstand. Auf der Tontafel kann man ein Quadrat erkennen, dessen Kantenlänge ohne Angabe der Maßeinheit mit ½ (oder 30) angegeben wird. Die Babylonier verwendeten ein Stellenwertsystem mit der Basis 60; in diesem Fall ist unklar, ob es sich um 30 Einer oder 30 Sechzigstel handelt. An den Diagonalen befinden sich zwei Angaben, unten $\frac{152735}{216000}$(oder $\frac{3547}{720}$) und oben$\frac{305470}{216000}$. Der Schüler hat vermutlich aus einer Tabelle auf einer anderen Tontafel den Wert $\frac{305470}{216000} = 1{,}414212963\ldots$ als Annäherung für $\sqrt{2}$ übernommen und anschließend mit ½ (bzw. 30) multipliziert, um den zweiten Wert als Ergebnis für die Länge der Diagonale zu erhalten. In einem Quadrat mit Kantenlänge a hat die Diagonale die Länge $\sqrt{2}a$. Der tatsächliche Wert von $\sqrt{2}$ ist 1,41421356237…; es handelt sich also um eine relativ genaue Annäherung.

Die alten Griechen

Das Wissen um das Vorhandensein und die Eigenschaften irrationaler Zahlen ist im antiken Griechenland ab dem Ende des fünften vorchristlichen Jahrhunderts nachweisbar. Der erste namentlich bekannte griechische Mathematiker, der sich mit irrationalen Zahlen beschäftigte, war Theodoros von Kyrene (ca. 470 – 400 v. Chr.), von dem der Philosoph Platon (der vermutlich einer seiner Schüler war) in seinem Dialog Theaitetos berichtet, dass er die Inkommensurabilität von 1 mit $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw. bis (einschließlich oder ausschließlich) $\sqrt{17}$ gezeigt hätte. Die Zahl $\sqrt{2}$ wird nicht erwähnt; ihre Irrationalität dürfte (mehr oder weniger kurz) vorher bereits (vermutlich von einer anderen Person) bewiesen worden sein. In der Tat weisen verschiedene Zeugnisse darauf hin, dass das Phänomen der irrationalen Zahl (bzw. inkommensurabler Größen) beim Quadrat entdeckt worden ist (wo Kantenlänge und Diagonale im Verhältnis 1: $\sqrt{2}$stehen). So deuten sowohl Platon als auch Aristoteles in ihren Schriften mehrfach auf diesen Sachverhalt hin.

Der Beweis des Euklid

Wie die Entdeckung der Inkommensurabilität vonstattenging, ist unbekannt. Der vermutlich älteste überlieferte Beweis der Inkommensurabilität von zwei Strecken betrifft zwar das Quadrat, er befindet sich allerdings erst im Werk des Euklid. Euklid wirkte um 300 v. Chr. vermutlich in Alexandria in Ägypten und sammelte einen großen Teil des mathematischen Wissens seiner Zeit in seiner Schrift „Elemente“. Das zehnte Buch dieser Schrift hat einen Anhang (der als 117. Satz des Zehnten Buches gezählt wird), in dem gezeigt wird, dass die Diagonale und die Seite eines Quadrates zueinander inkommensurabel sind. Es handelt sich um einen indirekten Beweis:

Man setzt zunächst voraus, dass die Seite (AD bzw. a) und die Diagonale (AC bzw. b) zueinander kommensurabel wären. Dann würden die beiden Längen in einem Verhältnis a:b zueinander stehen mit natürlichen Zahlen a und b. Man verlangt, dass a und b die kleinstmöglichen Zahlen sein sollen (also teilerfremd sind). Was damit gemeint ist, wird klar, wenn man a:b als Bruch schreibt: Der Bruch a/b soll vollständig gekürzt sein. Anschließend benutzt man den Satz des Pythagoras, um festzustellen, dass das Quadrat über AC doppelt so groß sein muss wie das Quadrat über AD. Die Punkte A, D und C bilden nämlich ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, in dem AC die Hypotenuse und AD und DC die beiden gleich langen Katheten sind. Es gilt also $AD^2 + DC^2 = AC^2$ bzw. $2\ AD^2 = AC^2$. Daraus kann man schlussfolgern, dass auch a^2 und b^2 im gleichen Verhältnis stehen müssen: $2a^2 = b^2$. Dies bedeutet, dass b^2 eine gerade Zahl sein muss (es lässt sich nämlich offensichtlich ohne Rest durch 2 teilen). An dieser Stelle benutzt man die Regel, dass eine Zahl gerade sein muss, wenn ihr Quadrat gerade ist. Also muss b selbst eine gerade Zahl sein. Aber wenn eine Zahl gerade ist, so ist ihr

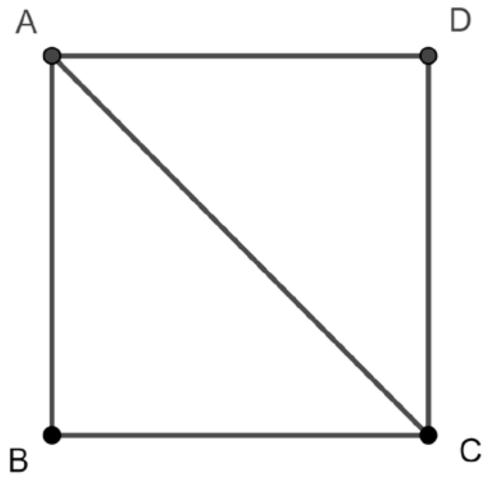


Illustration zu Euklids Beweis der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat. Ähnliche Zeichnungen finden sich auch in Euklids Elementen.

Quadrat durch 4 teilbar. Aus dem oben Gesagten folgt, dass b^2 ohne Rest durch 4 teilbar ist. Das Ergebnis könnte zum Beispiel c sein. Aber dann gilt: $2a^2 = b^2$ lässt sich umformen zu $2a^2 = 4c^2$. Daraus ließe sich aber schlussfolgern, dass $a^2 = 2c^2$ ist. Und somit ist a^2 ebenfalls eine gerade Zahl. Da es sich um das Quadrat von a handelt, muss a auch selbst gerade sein. Das Endergebnis wäre, dass sowohl b als auch a gerade Zahlen sein müssen. Da a und b teilerfremd gewählt wurden, muss aber mindestens eine der beiden Zahlen ungerade sein. Damit ergibt sich ein Widerspruch. Die beiden Größen können nicht kommensurabel sein, da ansonsten eine Zahl zugleich gerade und ungerade sein müsste.

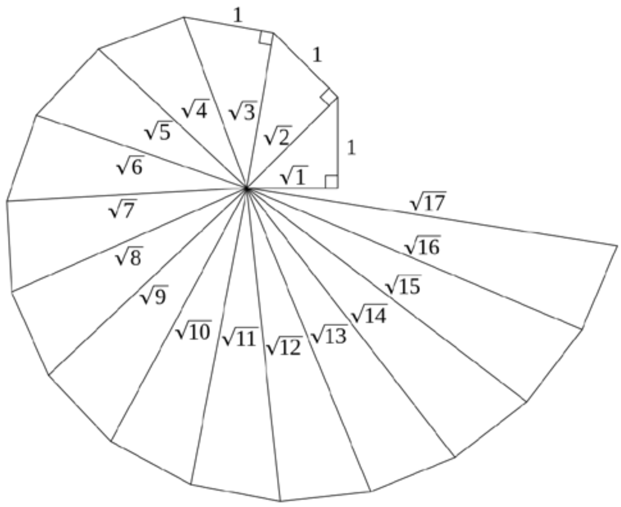
Der oben wiedergegebene Beweis dürfte längere Zeit vor Euklid entstanden sein. Er benutzt in einer für Euklid eher untypischen Art und Weise die Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen, bei denen es sich vermutlich um ein relativ altes Betätigungsfeld der griechischen Mathematik handelt (das insbesondere für die frühen Pythagoräer typisch gewesen sein dürfte). Allerdings kann es sich nicht um den Gedankengang handeln, mit dem die Inkommensurabilität zum ersten Mal entdeckt worden ist.

Dagegen spricht vor allem, dass ein relativ komplexer indirekter Beweis verwendet wird, der das Wissen über das Vorhandensein der Inkommensurabilität beim Quadrat im Grunde genommen voraussetzt. Die genaue Art und Weise der eigentlichen Entdeckung und auch ihr Zeitpunkt sind unbekannt und lassen sich vermutlich nicht mehr eruieren. Dabei kann es durchaus sein, dass dieser Schritt von frühen Pythagoräern gemacht wurde, aber dies ist nicht nachweisbar. Dafür spricht allerdings, dass Euklids Beweis die Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen benutzt. Verschiedene Zeugnisse deuten darauf hin, dass sich die frühen Pythagoräer relativ intensiv mit diesem Thema beschäftigt haben.

Theodoros

Nicht nur die Art und Weise der Entdeckung der Inkommensurabilität sondern auch die Vorgehensweise des oben bereits erwähnten Theodoros ist unbekannt. Eine Rekonstruktion wird dadurch erschwert, dass aus Platons Bericht nicht deutlich wird, ob der Beweis bei 17 noch gelungen ist oder nicht.

Im Laufe der Zeit hat es mehrere Versuche zur Rekonstruktion gegeben. Im Rahmen eines solchen Versuchs wurde im 20. Jahrhundert die Theodorus-Spirale bzw. Quadratwurzelspirale als von Theodoros verwendetes Hilfsmittel vorgeschlagen: Bei dieser Spirale wird zunächst ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit einer Schenkellänge von 1 Einheit gezeichnet, bei dem die Hypotenuse die Länge $\sqrt{2}$ hat. Anschließend werden neue rechtwinklige Dreiecke konstruiert, die jeweils die Hypotenuse des vorherigen Dreiecks als neue Kathete und eine Strecke der Länge 1 Einheit als zweite Kathete haben. Mit diesem Verfahren lassen sich Strecken der Länge $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ bis $\sqrt{17}$ zeichnen. Schwierigkeiten entstehen erst bei $\sqrt{18}$, da sich die weiteren Dreiecke überschneiden würden. Dieser Rekonstruktionsversuch setzt voraus, dass Theodoros den Beweis für $\sqrt{17}$ noch vollenden konnte Andere Rekons-truktionsversuche gehen davon aus, dass Theodorus bei seinen Beweisen die Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen benutzt hat. Es lässt sich zeigen (vgl. z. B. Wilbur Knorr: The Evolution of the Euclidian Elements [von 1975]), dass $\sqrt{17}$ die erste Zahl ist, bei der ein solcher Beweis nicht gelingen kann. In diesem Fall wäre Theodoros der Beweis bei $\sqrt{17}$ nicht mehr gelungen.



Theodorus-Spirale

Fortsetzung folgt...

Quellen (in Auswahl)

C. Thaer (Hrsg.): Die Elemente von Euklid, Frankfurt am Main 2010 (Nachdruck der vierten Auflage von 2003).

I. Thomas (Hrsg.): Selections illustrating the history of Greek Mathematics, Band 1: From Thales to Euclid, London 1957³. (Loeb Classical Library)

Literatur (in Auswahl)

P. J. Davies: Spirals from Theodorus to Chaos, Wellesley 1993.

D. Fowler und E. Robson: Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics. YBC 7289 in Context, in: Historia Mathematica 25 (1998), S. 366-378.

J. Havil: The Irrationals. A Story of the Numbers You Can`t Count On, Princeton u. Oxford 2012.

D. Herrmann: Die antike Mathematik. Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen, Berlin u. Heidelberg 2014

D. Herrmann: Mathematik im Vorderen Orient. Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotamien, Berlin 2019

W. R. Knorr: The Evolution of the Euclidian Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry, Dordrecht 1975.

A. Martinez: The Cult of Pythagoras. Math and Myths, Pittsburgh 2012.

Bildnachweis

Alle Bilder wurden vom Autor mit Hilfe von Geogebra selbst erstellt.

Autor

Helmut Tiex (Moderator im Mathe-Treff der Bezirksregierung Düsseldorf)